4　関数とグラフ

30

x 軸と接することから，$2x^2+ax+b=0$ は重解をもつ。

よって，判別式を D とすると，$D=0$ より，$a^2-8b=0$

$a>0$ だから，$a^2=8b(>0)$　・・・①

また，重解を α とすると，解と係数の関係より，$2\alpha=-\dfrac{a}{2}$　$\therefore \alpha=-\dfrac{a}{4}$

よって，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{a}{4},\ 0\right)$　・・・②

点 Q の y 座標は，$y=2x^2+ax+b$ に $x=0$ を代入することにより，$y=b$

よって，$\mathrm{Q}(0,\ b)$　・・・③

②，③より，

$$\mathrm{PQ}^2=\left(-\frac{a}{4}\right)^2+b^2$$
$$=\frac{a^2}{16}+b^2$$

これと $\mathrm{PQ}=\sqrt{3}$ より，$\dfrac{a^2}{16}+b^2=3$

これに①を代入すると，$\dfrac{b}{2}+b^2=3$　$\therefore \dfrac{1}{2}(b+2)(2b-3)=0$

これと $b>0$ より，$b=\dfrac{3}{2}$

さらに，これを①に代入して $a\ (>0)$ を求めると，$a=2\sqrt{3}$

以上より，$a=2\sqrt{3},\ b=\dfrac{3}{2}$

31

C_2 上の点 $(-2,\ -10)$ と $y=1$ に関して対称な点を $(x_1,\ y_1)$ とすると，

$x_1=-2,\ \dfrac{-10+y_1}{2}=1$ より，$(x_1,\ y_1)=(-2,\ 12)$

$(x_1,\ y_1)$ は C_1 上の点だから，$12=4a-2b+4$　$\therefore 2a-b=4$　・・・①

C_3 上の点 $(3,\ -2)$ と $x=1$ に関して対称な点を $(x_2,\ y_2)$ とすると，

$\dfrac{3+x_2}{2}=1,\ y_2=-2$ より，$(x_2,\ y_2)=(-1,\ -2)$

$(x_2,\ y_2)$ は C_2 上の点だから，これを $y=1$ に関して対称移動した点すなわち C_1 上の点を

$(x_3,\ y_3)$ とすると，$x_3=-1,\ \dfrac{-2+y_3}{2}=1$ より，$(x_3,\ y_3)=(-1,\ 4)$

よって，$4=a-b+4 \quad \therefore a=b$ ・・・②

ゆえに，①と②の連立方程式を解くことにより，$a=b=4$

32

$f(a)=b$ より，$a^3+ab+c=b \quad \therefore a^3+ab+c-b=0$ ・・・①

$f(b)=c$ より，$ab^2+b^2+c=c \quad \therefore b^2(a+1)=0 \quad b\neq 0$ より，$a=-1$ ・・・②

$f(c)=a$ より，$ac^2+bc+c=a \quad \therefore ac^2+bc+c-a=0$ ・・・③

②を①，③に代入し，それぞれを整理すると

$c=2b+1$ ・・・④

$c^2-bc-c-1=0$ ・・・⑤

④を⑤に代入し，整理すると，$(b+1)(2b-1)=0 \quad \therefore b=-1,\ \dfrac{1}{2}$

④より，$b=-1$ のとき $c=-1$，$b=\dfrac{1}{2}$ のとき $c=2$

以上より，$(a,\ b,\ c)=(-1,\ -1,\ -1),\left(-1,\ \dfrac{1}{2},\ 2\right)$

よって，$f(x)=-x^2-x-1,\ -x^2+\dfrac{1}{2}x+2$

33

$y=f(x)=ax^2-(a+2)x-1$ とすると，

$f(0)=-1<0$ だから，$-1<\alpha<0,\ 2<\beta<3$ を満たすためには，

中間値の定理により，$f(-1)=2a+1>0$，$f(2)=2a-5<0$，$f(3)=6a-7>0$

$\therefore \dfrac{7}{6}<a<\dfrac{5}{2}$

a は整数だから，$a=2$

34

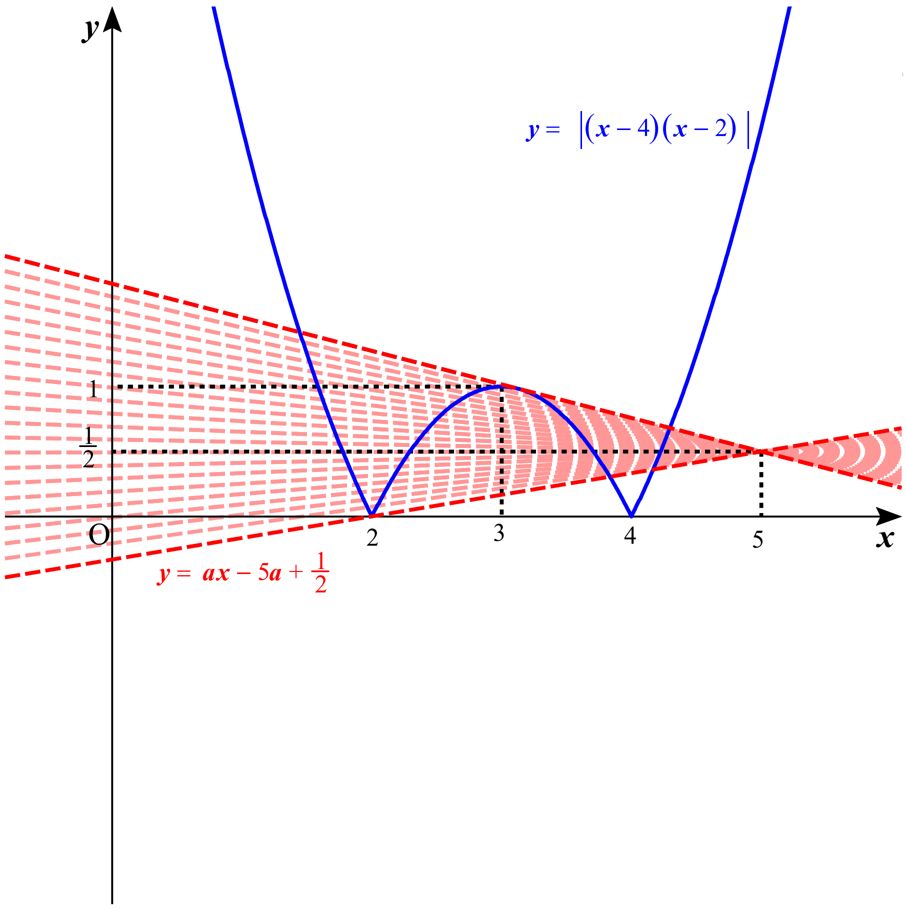
$$y=ax-5a+\frac{1}{2}$$
$$=a(x-5)+\frac{1}{2}$$

より，$y=ax-5a+\dfrac{1}{2}$ は定点$\left(5,\ \dfrac{1}{2}\right)$を通る。

$f(x)$ については，$x<2,\ 4\leq x$ のとき $f(x)=(x-4)(x-2)$，

$2\leq x<4$ のとき $f(x)=-(x-4)(x-2)=-(x-3)^2+1$

よって，グラフは次のようになる。



したがって，$y = ax - 5a + \frac{1}{2}$ の傾きは点 $(2,\ 0)$ を通るときの傾きより小さく，

$y = -(x-4)(x-2)$ と $2 < x < 4$ において接するときの傾きより大きいとき，

相異なる 4 つの共有点をもつ。

$y = ax - 5a + \frac{1}{2}$ の傾きは点 $(2,\ 0)$ を通るとき

$0 = -3a + \frac{1}{2}$ より，$a = \frac{1}{6}$

$y = -(x-4)(x-2)$ と $2 < x < 4$ において接するとき

$-(x-4)(x-2) = ax - 5a + \frac{1}{2}$ すなわち $x^2 + (a-6)x - 5a + \frac{17}{2} = 0$ が重解をもつことが必要

だから，判別式を D とすると，$D = 0$ より，$a^2 + 8a + 2 = 0$ $\quad \therefore a = -4 \pm \sqrt{14}$

重解を α とすると，解と係数の関係より，$2\alpha = a - 6$ $\quad \therefore \alpha = -\frac{a-6}{2}$

これと $2 < \alpha < 4$ より，$a = -4 + \sqrt{14}$

よって，$-4 + \sqrt{14} < a < \frac{1}{6}$

35

(1)

$0 \leq x < 1$ のとき

$[x]=0$ より，$y=0$

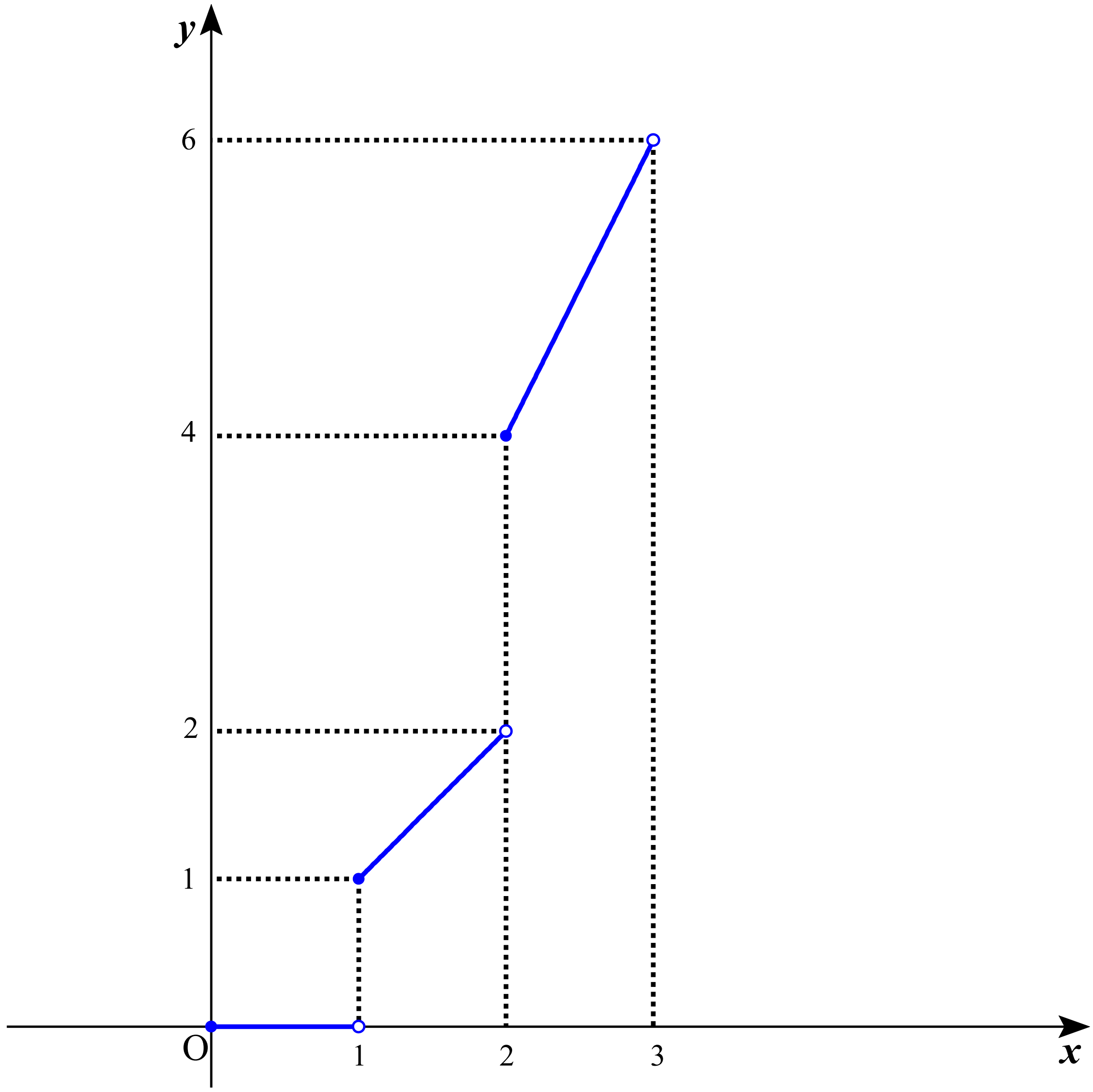
$1 \leq x < 2$ のとき

$[x]=1$ より，$y=x$

$2 \leq x < 3$ のとき

$[x]=2$ より，$y=2x$

よって，グラフは下図のようになる。



(2)

a は正の定数だから，$y=ax^2+\frac{5}{2}\geq\frac{5}{2}$

よって，共有点の y 座標は $\frac{5}{2}$ 以上の値をとる。

したがって，$y=ax^2+\frac{5}{2}$ が $y=2x\ (2\leq x<3)$ と相異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めればよい。

$y=ax^2+\frac{5}{2}$ が $y=2x\ (2\leq x<3)$ と相異なる 2 つの共有点をもつことと

$ax^2+\frac{5}{2}=2x$ が $2\leq x<3$ の範囲で異なる 2 実数解をもつことは同値であり，

さらに，これと $f(x)=ax^2-2x+\frac{5}{2}$ が $2\leq x<3$ の範囲で x 軸と異なる 2 つの共有点をもつことは同値である。

そこで，$f(x)=ax^2-2x+\frac{5}{2}$ が $2\leq x<3$ の範囲で x 軸と異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めることにする。

$$
\begin{aligned}
f(x)&=ax^2-2x+\frac{5}{2}\\
&=a\left(x-\frac{1}{a}\right)^2-\frac{1}{a}+\frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

より，

軸 $x=\frac{1}{a}$ の範囲について満たすべき条件は $2<\frac{1}{a}<3$ すなわち $\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$ ・・・①

頂点の y 座標について満たすべき条件は $-\frac{1}{a}+\frac{5}{2}<0$ すなわち $a<\frac{2}{5}$ ・・・②

また，中間値の定理より $f(2)=4a-\frac{3}{2}\geq0$ かつ $f(3)=9a-\frac{7}{2}>0$ すなわち $a>\frac{7}{18}$ ・・・③

よって，①かつ②かつ③より，$\frac{7}{18}<a<\frac{2}{5}$

逆に $\frac{7}{18}<a<\frac{2}{5}$ ならば $f(x)=ax^2-2x+\frac{5}{2}$ が $2\leq x<3$ の範囲で x 軸と異なる 2 つの共有点をもつ。

ゆえに，$\frac{7}{18}<a<\frac{2}{5}$

36

線分 L の方程式は $y=2x\ (0\leq x\leq 1)$ だから，$y=x^2+ax+b$ と線分 L が共有点をもつことと $x^2+ax+b=2x$ すなわち $x^2+(a-2)x+b=0$ が $0\leq x\leq 1$ において少なくとも 1 つの解をもつことは同値である。

したがって，$f(x)=x^2+(a-2)x+b$ とおくと，$y=f(x)$ が $0\leq x\leq 1$ において x 軸と少なくとも 1 つの共有点をもつような実数の組 $(a,\ b)$ の集合を ab 平面上に図示すればよい。

$f(x)$ と x 軸との共有点の存在のしかたについては以下のように分類できる。

$f(0)f(1)>0$ のとき

・x 軸と共有点をもたない。

・共有点は $0<x<1$ にのみ存在する。

・共有点は $x<0$ （または $1<x$ ）にのみ存在する。

$f(0)f(1)=0$ のとき

1 つの共有点は $x=0$ または $x=1$ である。

$f(0)f(1)<0$ のとき

共有点は 2 つ存在し, 1 つは $0<x<1$ において, 1 つは $x<0$ または $1<x$ においてである。

よって，$y=f(x)$ が $0\leq x\leq 1$ において x 軸と少なくとも 1 つの共有点をもつことは $y=f(x)$ と x 軸との共有点が $0<x<1$ にのみ存在するか $f(0)f(1)\leq 0$ となることと同値である。

(i) $y=f(x)$ と x 軸との共有点が $0<x<1$ にのみ存在するとき

放物線は下に凸かつ $f(0)f(1)>0$ より,

$f(0)=b>0$ 　・・・①　$f(1)=a+b-1>0$ 　・・・②

また,

$$f(x)=x^2+(a-2)x+b$$
$$=\left(x+\frac{a-2}{2}\right)^2-\frac{(a-2)^2-4b}{4}$$

より,

軸 $x=-\dfrac{a-2}{2}$ について満たすべき条件は $0<-\dfrac{a-2}{2}<1$ 　$\therefore 0<a<2$ 　・・・③

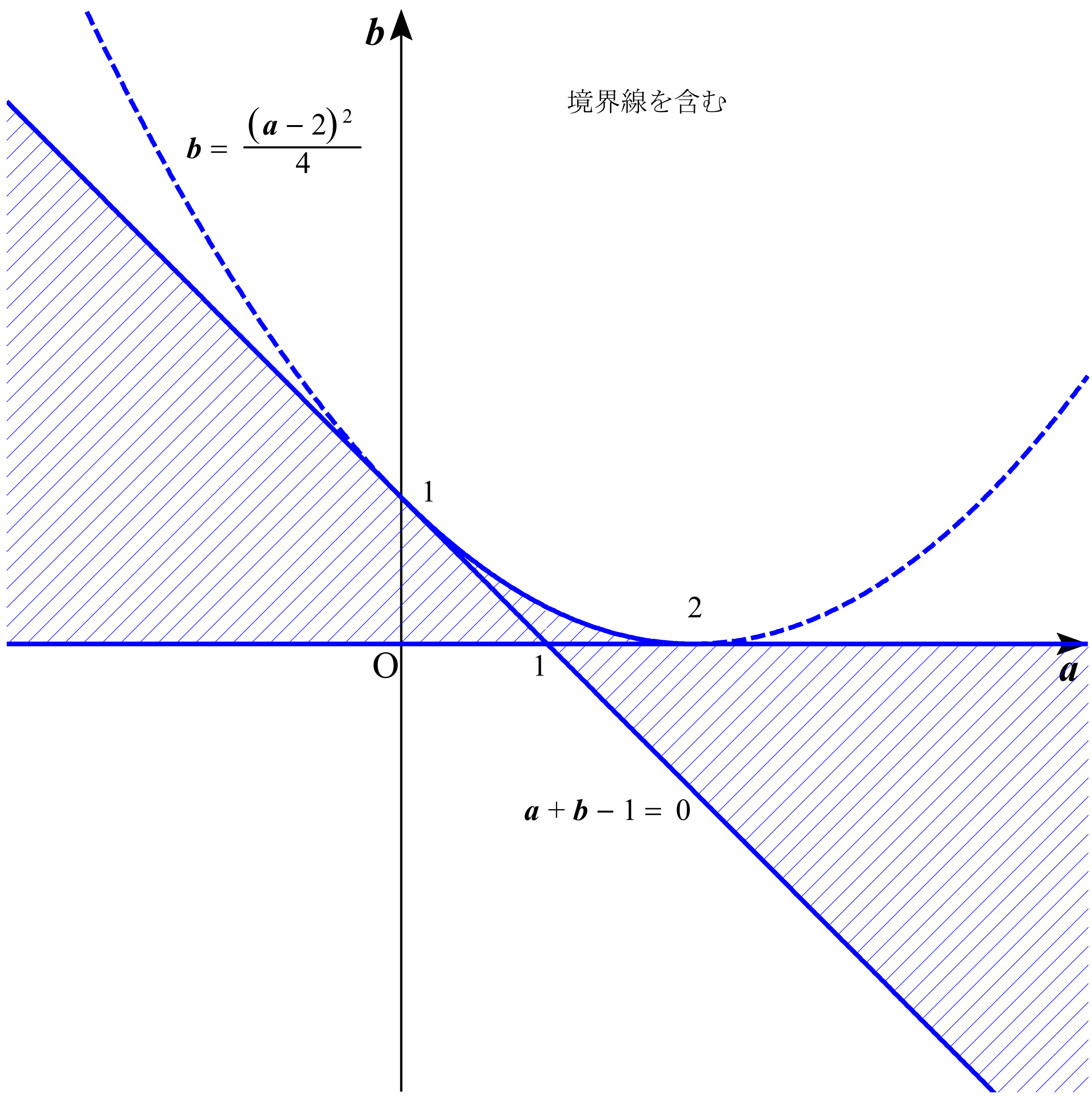
頂点の y 座標について満たすべき条件は $-\dfrac{(a-2)^2-4b}{4}\leq 0$ 　$\therefore b\leq\dfrac{(a-2)^2}{4}$ 　・・・④

(ii) $f(0)f(1)\leq 0$ のとき

$f(0)f(1)=b(a+b-1)\leq 0$

よって，$a+b-1\geq 0$ （$b\leq 0$）または $a+b-1\leq 0$ （$b\geq 0$）　・・・⑤

(i)または(ii)であればよいから,（①かつ②かつ③かつ④）または⑤を満たす実数の組 $(a,\ b)$ の集合を ab 平面上に図示すればよい。


b
a
境界線を含む
$b=\dfrac{(a-2)^2}{4}$
1
O
1
2
$a+b-1=0$

37

(1)

直線 PQ の方程式は $y=\dfrac{-4-12}{2-(-2)}(x-2)-4$ より，$y=-4x+4$

よって，直線 PQ と x 軸すなわち $y=0$ の共有点の x 座標は，$0=-4x+4$ より，$x=1$

(2)

$k=-4$ のとき

$y=x^2-4x$ と $y=-4(x-a)$ の共有点の x 座標は $x^2-4x=-4(x-a)$ すなわち $x^2=4a$ の解

したがって，$-2\leq x\leq 2$ の範囲で共有点をもつとき $0\leq x^2\leq 4$ より，$0\leq a\leq 1$

よって，$a<0,\ 1<a$ は条件を満たさない（反例 $k=-4$）。

$a=0$ のとき

共有点の x 座標は $x^2-4x=kx$ すなわち $x\{x-(k+4)\}=0$ の解である。

したがって，1 つの解は $x=0$ である。

$a=1$ のとき

共有点の x 座標は $x^2-4x=k(x-1)$ すなわち $x^2-(k+4)x+k=0$ の解である。

$k=-4$ のとき

共有点の x 座標は ± 2 である。

$k\neq -4$ のとき

$y=f(x)=x^2-(k+4)x+k$ とすると，

$y=f(x)$ と x 軸との共有点の x 座標は $x^2-(k+4)x+k=0$ の解と一致する。

$y=f(x)$ と x 軸との共有点の x 座標については，

$$\begin{aligned}f(-2)f(2)&=(3k+12)(-k-4)\\&=-3(k+4)^2<0\end{aligned}$$

より，$-2<x<2$ に共有点が存在する。

したがって，$x^2-(k+4)x+k=0$ は $-2<x<2$ において解をもつ。

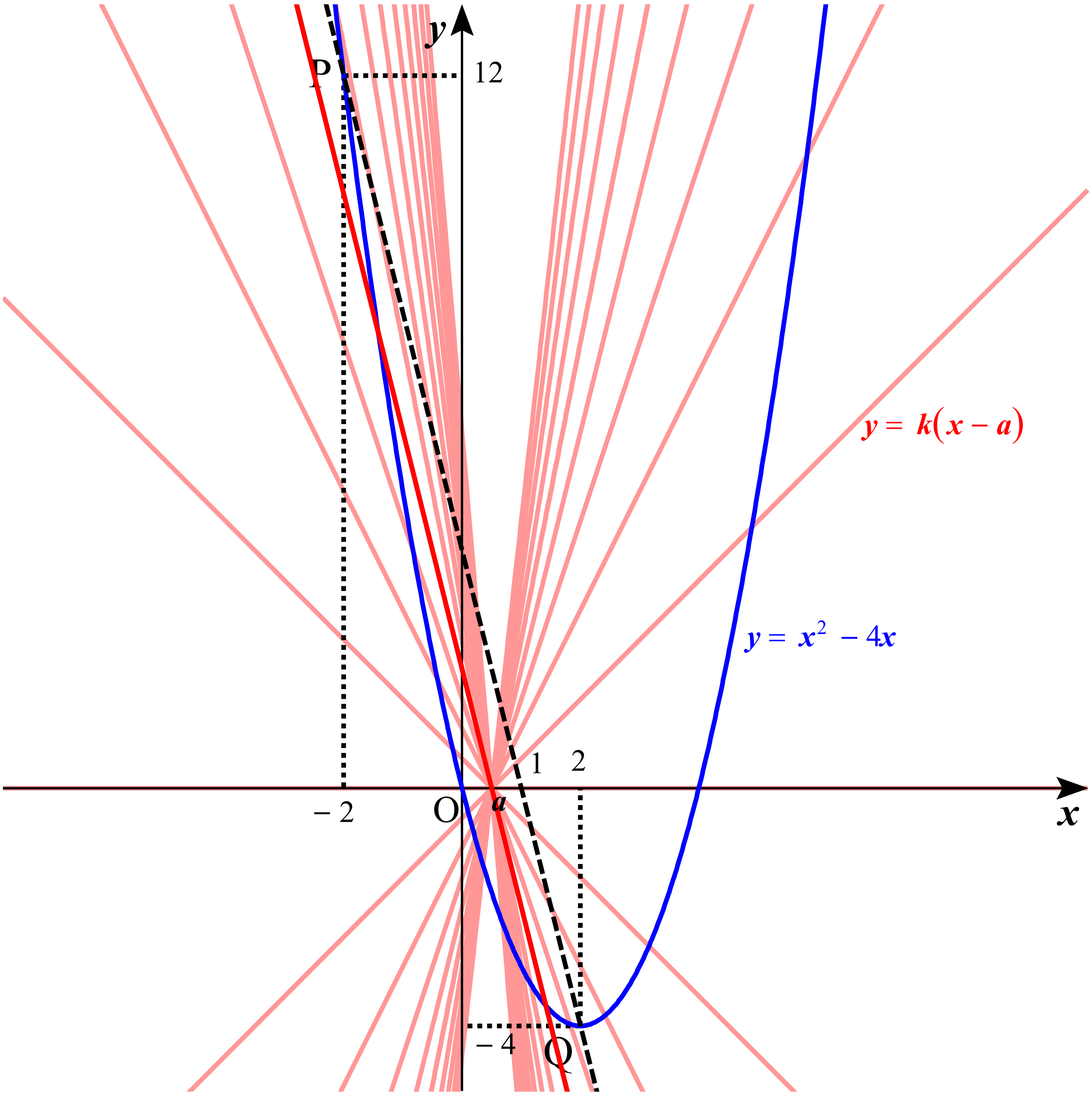
$0<a<1$ のとき

$y=x^2-4x$ と $y=k(x-a)$ のグラフより，

$k\leq -4$ のとき $a<x<2$ において共有点が必ず存在する。

$-4<k$ のとき $-2<x<a$ において共有点が必ず存在する。

以上より，条件を満たす a の値の範囲は $0\leq a\leq 1$


y
P
12
y = k(x − a)
y = x² − 4x
1
2
−2
O
a
x
−4
Q

38

与式より，$f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

よって，$y=f(x)$ と $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ のグラフの共有点の x 座標が求める解である。

そこで，$y=f(x)$ のグラフの概形について調べる。

$$\begin{aligned} f(x+2)&=-f(x+1)+1 \\ &=-\{-f(x)+1\}+1 \\ &=f(x) \end{aligned}$$

より，関数 $f(x)$ は周期関数で，その周期は 2 である。

したがって，$0\leq x<2$ における $y=f(x)$ の概形を調べればよい。

(A)より，$0\leq x<1$ のとき $f(x)=x$

(B)より，$f(x)=-f(x-1)+1$ ・・・①

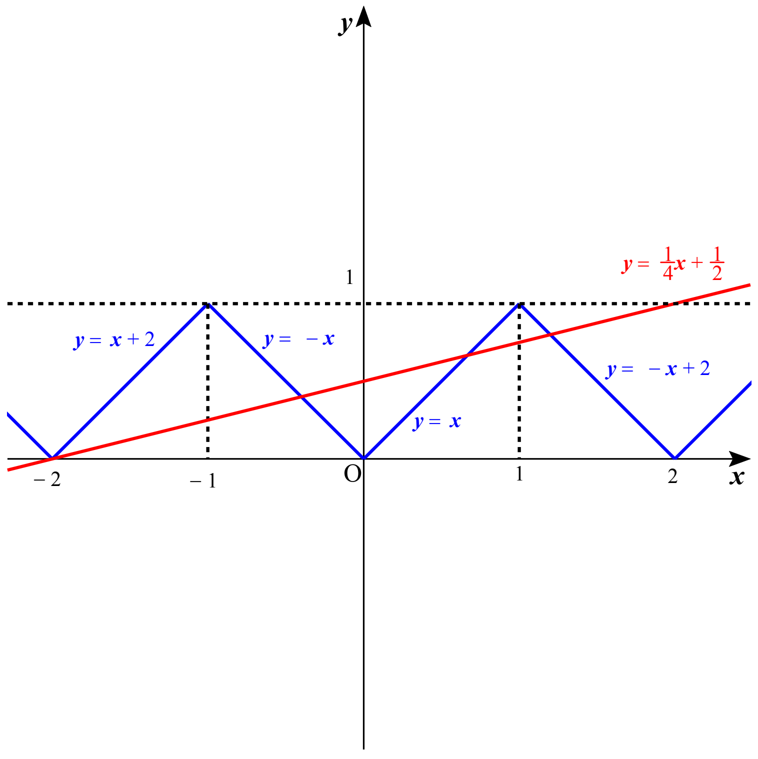
(A)より，$0\leq x-1<1$ すなわち $1\leq x<2$ のとき $f(x-1)=x-1$ ・・・②

①，②より，$1\leq x<2$ のとき $f(x)=-(x-1)+1=-x+2$

よって，$f(x)=\begin{cases} x & (0\leq x<1) \\ -x+2 & (1\leq x<2) \end{cases}$

これと $f(x)$ が周期 2 の関数であることから，

$y=f(x)$ と $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ のグラフをかくと次のようになる。



よって，$y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ が $y=x+2,\ y=-x,\ y=x,\ y=-x+2$ の共有点の x 座標が求める解である。

ゆえに，$\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}=x+2,\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}=-x,\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}=x,\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}=-x+2$ を解くことにより，

$x=-2,\ -\frac{2}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{6}{5}$

補足

抽象的な問題に対しては，数値代入，条件を満たす簡単な図形，グラフ，表などで具体化し，規則性を発見することから始める。

問題の場合

$x\geq 0$ のとき

$f(0)=0$
$f(1)=f(0+1)=-f(0)+1=0+1=1$
$f(1.1)=f(0.1+1)=-f(0.1)+1=-0.1+1=0.9$
$f(1.2)=f(0.2+1)=-f(0.2)+1=-0.2+1=0.8$
$\vdots$
$f(2)=f(1+1)=-f(1)+1==-1+1=0$
$f(2.1)=f(1.1+1)=-f(1.1)+1=-0.9+1=0.1$
$f(2.2)=f(1.2+1)=-f(1.2)+1=-0.8+1=0.2$
$\vdots$
$f(3)=f(2+1)=-f(2)+1=0+1=1$
$\vdots$

$x<0$ のとき

$f(0)=f(-1+1)=-f(-1)+1$
これと $f(0)=0$ より，$0=-f(-1)+1 \quad \therefore f(-1)=1$
$f(0.1)=f(-0.9+1)=-f(-0.9)+1$
これと $f(0.1)=0.1$ より，$0.1=-f(-0.9)+1 \quad \therefore f(-0.9)=0.9$
$\vdots$